1. REDUCCIÓN DE ORDEN

Reducción de una ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden.

Uno de los hechos matemáticos más interesantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, es que podemos encontrar una segunda solución y_2 para la ecuación homogénea:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en un intervalo $I \in \mathbb{R}$, siempre que se conozca una solución $y_1$no trivial en ese intervalo I.

Considerando que si y_1, y_2, son dos soluciones de la ecuación diferencial lineal, homogénea de orden 2 en un intervalo I, entonces el conjunto de soluciones linealmente inependiente en I es $\{y_1, y_2\}$,(llamado conjunto fundamental de soluciones) donde $W[y_1, y_2]$ es diferente de cero, para toda x en el intervalo. Además podemos afirmar que el cociente $u(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ no es una función constante en el intervalo I.

Resolviendo en general una ecuación de la forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

que se puede expresar como

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = 0$$

o bien

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

en donde $P(x), Q(x)$ son continuas en algún intervalo I.

Supongamos además que $y_1(x)$ es diferente de cero y es una solución conocida en algún intervalo I.

Si definimos a y_2 como $y = u(x)y_1(x)$ entonces al ser solución de la ecuación, podemos derivar y sustituir en la ecuación diferencial de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} y' &= uy_1' + y_1u' \\ y'' &= uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' \end{aligned}$$

de donde

$$y'' + Py' + Qy = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' + P\left(uy_1' + y_1u'\right) + Quy_1 = 0$$

reacomodando la ED

$$u\left(y_1'' + Py_1' + Qy_1\right) + y_1u'' + \left(2y_1' + Py_1\right)u' = 0$$

donde $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$ ya que conocemos que y_1 es solución de la ecuación, quedando entonces que

$$y_1u'' + \left(2y_1' + Py_1\right)u' = 0$$

haciendo que $w = u'$ la ED toma la forma

$$y_1w' + \left(2y_1' + Py_1\right)w = 0$$

que es una ecuación lineal y separable conocida por nosotros, y por lo tanto lista para ser resuelta

$$\frac{dw}{w} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + P\right) dx$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dw}{w} &= \int \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P\right) dx \\ \ln w &= -2\ln(y_1) - \int P dx \\ w &= \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} \end{aligned}$$

pero como $w = u'$

$$u' = \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}$$

entonces

$$u = \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

y recordando que $\quad y_2 = u(x)y_1(x)$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

es una segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial lineal de orden 2.

Example 1.1. *Resuelva la ecuación diferencial lineal de orden 2*

$$y'' + 2y' + y = 0$$

sabiendo que $y_1 = xe^{-x}$.

Solución 1.2. *Para obtener una segunda solución linealmente independiente que conforme el conjunto de soluciones para el ED, calculamos*

$$y_2 = uy_1$$

donde

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{e^{-\int 2dx}}{(xe^{-x})^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y_2 &= \left(-\frac{1}{x}\right)\left(xe^{-x}\right) \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

o simplemente

$$y_2 = e^{-x}$$

por lo que

$$y = ce^{-x} + c_3 x e^{-x}$$

es la solución general de la ecuación diferencial expresada como una combinación lineal del conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, y_2\} = \{xe^{-x}, e^{-x}\}$.

Example 1.3. *Determine la solución general de la ecuación*

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

si la función $y_1 = x^2$ *es solución de la ecuación en el intervalo* $(0, \infty)$.

Solución 1.4. *Poniendo la ED en la fomra estandar*

$$y'' - 3x^{-1}y' + x^{-2}y = 0$$

tenemos una segunda solución como

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 \int \frac{e^{-\int \frac{-3}{x}dx}}{(x^2)^2} dx \\ &= x^2 \ln x \end{aligned}$$

Por tanto la solución general será

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

1.1. Ejercicios de REDUCCIÓN DE ORDEN.

Encuentre una segunda solución para cada ecuación diferencial. Suponga un intervalo apropiado de validez.

1. $y'' + 5y' = 0 \qquad y_1 = 1$ sol. $y_2 = e^{-5x}$
2. $y'' - y' = 0 \qquad y_1 = 1$ sol. $y_2 = e^{x}$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad y_1 = e^{2x}$ sol. $y_2 = xe^{2x}$
4. $y'' + 2y' + y = 0 \qquad y_1 = xe^{-x}$ sol. $y_2 = e^{-x}$
5. $y'' + 16y = 0 \qquad y_1 = \cos 4x$ sol. $y_2 = \sin 4x$
6. $y" + 9y = 0 \qquad y_1 = \sin 3x$ sol. $y_2 = \cos 3x$
7. $y'' - y = 0 \qquad y_1 = \cosh x$ sol. $y_2 = \sinh x$
8. $y'' - 25y = 0 \qquad y_1 = e^{5x}$ sol. $y_2 = e^{-5x}$
9. $9y'' - 12y' + 4y = 0 \qquad y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$ sol. $y_2 = xe^{\frac{2x}{3}}$
10. $6y'' + y' - y = 0 \qquad y_1 = e^{\frac{x}{3}}$ sol. $y_2 = e^{\frac{-x}{2}}$

11. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0 \qquad y_1 = x^4$ sol. $y_2 = x^4 \ln|x|$

12. $x^2\ y'' + 2xy' - 6y = 0 \qquad y_1 = x^2$ sol. $y_2 = x^{-3}$

13. $xy'' + y' = 0 \qquad y_1 = \ln x$ sol. $y_2 = 1$

14. $4x^2y'' + y = 0 \qquad y_1 = x^{\frac{1}{2}} \ln x$ sol $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$

15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0 \qquad y_1 = x + 1$ sol. $y_2 = x^2 + x + 1$

16. $(1 - x^{2)}y'' - 2xy' = 0 \qquad y_1 = 1$ sol. $y_2 = \ln|(1 + x)/(1 - x)|$

17. $x^2y'' - xy' + 2y = 0 \qquad y_1 = x\sin(\ln x)$ sol. $y_2 = x\cos(\ln x)$

18. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0 \qquad y_1 = x^2\cos(\ln x)$ sol. $y_2 = x^2\sin(\ln x)$

19. $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0 \qquad y_1 = e^{-2x}$ sol. $y_2 = x$

20. $(1 + x)\ y'' + xy' - y = 0 \qquad y_1 = x$ sol. $y_2 = e^{-x}$

21. $x^2y'' - xy' + y = 0 \qquad y_1 = x$ sol. $y_2 = x\ln x$

22. $x^2y'' - 20y = 0 \qquad y_1 = x^{-4}$ sol. $y_2 = x^5$

23. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0 \qquad y_1 = x^3\ln x$ sol. $y_2 = x^3$

24. $x^2y'' + xy' + y = 0 \qquad y_1 = \cos(\ln x)$ sol. $y_2 = \sin(\ln x)$

25. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad y_1 = x^2 + x^3$ sol. $y_2 = x^2$

26. $x^2y'' - 7xy' - 20y = 0 \qquad y_1 = x^{10}$ sol. $y_2 = x^{-2}$

27. $(3x + 1)y'' - (9x + 6)y' + 9y = 0 \qquad y_1 = e^{3x}$ sol. $y_2 = 3x + 2$

28. $xy'' - (x + 1)y' + y = 0 \qquad y_1 = e^x$ sol. $y_2 = -(x + 1)$

29. $y'' - 3(\tan x)y' = 0 \qquad y_1 = 1$ sol. $y_2 = \frac{1}{2}\left(\tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|\right)$

30. $xy'' - (2 + x)y' = 0 \qquad y_1 = 1$ sol. $y_2 = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$